PREMIER PROBLEME

1° Soit f une fonction réelle, de variable réelle, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'hypothèse (1) :

(1) $\exists\ A \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall\ (x, x') \in \mathbb{R}^2 \qquad | f(x) - f(x') | \leqslant A\ | x - x' |.$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il existe 2 réels L et M tels que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad | f(x) | \leqslant L + M\ | x |.$$

c. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée bornée (à savoir : $\exists\ K \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R} : | f'(x) | \leqslant K$); montrer que f vérifie l'hypothèse (1).

2° f étant une fonction du type précédent, on pose :

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} f(t)}{\sqrt{t - x}}\, dt.$$

a. Montrer que $g(x)$ existe quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $g(x)$ s'exprime simplement à l'aide de

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} f(u + x)}{\sqrt{u}}\, du.$$

c. En majorant $| h(x) - h(x') |$, montrer que h vérifie l'hypothèse (1), en déduire que h est continue, puis que g est continue sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer qu'il existe des réels C et D tels que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad | g(x) | \leqslant e^{-x} (C\ | x | + D).$$

En déduire la nature de la série de terme général :

$$u_n = \int_n^{\infty} \frac{e^{-t} f(t)}{\sqrt{t - n}}\, dt.$$

3° f étant toujours une fonction vérifiant l'hypothèse (1), on suppose en outre qu'elle admet une limite $l > 0$ lorsque x tend vers $-\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 < 0$ tel que :

$$\forall\ x < x_0 \qquad \int_x^{x_0} \frac{e^{-t} f(t)}{\sqrt{t - x}}\, dt > l\, e^{-x_0} \sqrt{x_0 - x}$$

Que peut-on en déduire pour $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

DEUXIEME PROBLEME

On considère un espace vectoriel réel E somme directe de deux de ses sous-espaces : $E = E_1 \oplus E_2$, E_1 et E_2 étant de même dimension finie n. Soit s un endomorphisme de E_1 vérifiant les propriétés suivantes :

a. $s \neq u_1$ et $s \neq -u_1$ (u_1 désignant l'endomorphisme identité de E_1);

b. s est diagonalisable;

c. s n'admet que des valeurs propres réelles appartenant à l'ensemble $\{-1, +1\}$.

1° *a.* Montrer que les noyaux Ker $(s + u_1)$ et Ker $(s - u_1)$ sont deux espaces non réduits au vecteur nul.

b. Montrer que $s \circ s = s^2$ est diagonalisable et que $s^2 = u_1$ (pour cette dernière égalité, on pourra commencer par chercher les valeurs propres de s^2).

2° g étant une application linéaire bijective de E_1 dans E_2 et s étant l'endomorphisme de E_1 précédent, on définit une application f de E dans E de la façon suivante :

Si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$,
on pose $f(x) = g(x_1) + g^{-1}(x_2) + s(x_1)$.

a. Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau.

b Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ ($x = x_1 + x_2$) un vecteur propre de f associé à cette valeur propre λ.

Montrer que nécessairement $\lambda \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$
et $s(x_1) = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) x_1$.

c. Déterminer toutes les valeurs propres de f.

En utilisant des bases $e_1, e_2, \ldots, e_p$ et $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n$ respectivement dans Ker $(s + u_1)$ et dans Ker $(s - u_1)$, déterminer des vecteurs propres de f associés à chacune des valeurs propres de f.

d. Montrer que f est diagonalisable.

E.N.S.E.T.
Section B" (programme TA) MATHEMATIQUES (3 h)
1983

3° On donne une matrice carrée réelle d'ordre 2 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inversible, d'inverse $\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$. On considère l'espace $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4$.

On pose :

$$g(\varepsilon_1) = a\,\varepsilon_3 + b\,\varepsilon_4$$
$$g(\varepsilon_2) = c\,\varepsilon_3 + d\,\varepsilon_4.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que la matrice carrée A d'ordre 4 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a' & c' \\ 0 & -1 & b' & d' \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ est diagonalisable.

Quelles sont ses valeurs propres?

TROISIEME PROBLEME

La série entière $\sum_0^\infty a_n x^n$, à coefficients réels, étant donnée, de rayon de convergence R non nul, on pose : $\forall x \in]-R, +R[\ f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$. On se propose de résoudre les équations différentielles :

$$x^2 y'' + x(p+q+1)y' + pqy = f(x)$$

où p et q sont deux entiers *distincts* strictement positifs donnés (p et $q \in \mathbb{N}^*$).

1° On demande d'établir que la série entière $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n}{n+p} x^n$ a même rayon R de convergence que la série $\sum_0^\infty a_n x^n$:

a. Faire d'abord la démonstration dans le cas où $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe.

b. Faire la démonstration dans le cas général. (Lorsque $r > R$, on pourra se servir de r' vérifiant $r > r' > R$ et écrire :

$$\frac{|a_n|}{n+p} r^n = |a_n| r'^n \frac{1}{n+p}\left(\frac{r}{r'}\right)^n.)$$

2° Pour $x \in]-R, +R[$, on pose :

$$g_p(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n x^n}{n+p} \quad \text{et} \quad x^p g_p(x) = h(x).$$

Montrer que h est dérivable sur $]-R, +R[$ et calculer sa dérivée à l'aide de f. En déduire que g_p est solution d'une équation différentielle E_p que l'on formera.

3° Pour $x \in]-R, +R[$ on pose :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n x^n}{(n+p)(n+q)}$$

a. En utilisant une décomposition de fraction rationnelle, trouver une relation entre g, g_p, g_q.

b. En utilisant la question précédente, montrer que g est solution de l'équation $E_{p,q}$: $x^2y'' + x(p+q+1)y' + pqy = f(x)$

sur l'intervalle $]-R, +R[$.

4° On considère l'équation différentielle homogène :

(1) $$x^2y'' + x(p+q+1)y' + pqy = 0$$

a. On suppose $x > 0$ et on pose $t = \ln x$ et $Y(t) = Y(\ln x) = y(x)$. Transformer l'équation différentielle (1) par ce changement de variable et en déduire toutes les solutions de (1) dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Déterminer de même les solutions de (1) dans $]-\infty, 0[$.

b. Résoudre l'équation différentielle $E_{p,q}$ sur chacun des intervalles $]-R, 0[$ et $]0, R[$ (en utilisant la fonction g). Existe-t-il des solutions sur $]-R, +R[$ autres que g?

5° Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x.$$

On commencera par déterminer $g_1(x)$ et $g_2(x)$ lorsque $f(x) = e^x$ (question 2°).